Konec srandy!!!

1.6.1 Mocniny s přirozeným mocnitelem

Předpoklady: základní početní operace

Pedagogická poznámka: Zápis na začátku kapitoly je víc než jen sranda. Tato hodina je první v druhé části studia. Až dosud nehrálo zásadní roli, zda studenti chápou a pamatují si všechno, co jsme probírali.
Od tohoto okamžiku se situace mění. Fakt, že studenti pochopí a budou si pamatovat všechny hlavní poznatky (červené rámečky), které budeme nyní probírat, je z hlediska budoucího postupu v matematice zcela zásadní. Od tohoto okamžiku stavíme základy, na kterých bude stát celý zbytek matematického vzdělávání na gymnáziu.
Zatímco dosud bylo hlavním cílem práce v hodinách to, aby se studenti naučili pracovat a chápat probíranou látku, nyní je k tomu potřeba přidat ještě zapamatování si probírané látky a stavbu konzistentního systému.
Dalším cílem výuky v tomto období je získání mechanických schopností při úpravě výrazů. Z tohoto důvodu v tomto období trvám na tom, aby studenti opravdu počítali všechny příklady ve sbírkách.

Pedagogická poznámka: Podle mě není možné probrat všechny vzorce pro mocniny s přirozeným mocnitelem v jediné hodině. Já jsem látku rozdělil do dvou hodin, navíc logicky k těmto dvěma hodinám patří i hodina *1604 KISS*, kde se studenty snažím naučit základní strategii postupného upravování bez zbytečného zesložiťování příkladu.
Je nutné, aby po každém vzorci i ti nejpomalejší samostatně vyřešili alespoň několik prvních bodů z následujícího příkladu. Ti rychlejší stihnou příkladů samozřejmě víc, navíc se mohou zabavit počítáním sbírky.

Pedagogická poznámka: Zcela zásadní při řešení jakýchkoliv problémů je navést žáky k tomu, aby si uvědomili, že chyba nevyplynula z toho, že nepostřehli nějaké další pravidlo, ale z toho, že dostatečně důsledně neuplatnili pravidlo dávno probrané. Snažím se žáky vést k tomu, aby veškerá pravidla viděli jako důsledek definice mocniny.

Matematika se snaží o zestručnění a zpřehlednění zápisu $\Rightarrow$

- $5+5+5+5+5+5=6\cdot 5$ (součet jsme napsali jako součin),
- $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5=5^6$ (součin jsme napsali jako mocninu).

Pro každé $a\in R$ a $n\in N$ platí: $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n-\text{krát}}$.

To není žádný objev na pochopení, jde jen o zestručnění zápisu.

Ve všech následujících příkladech se snažíme vidět veškerá odvozená pravidla a úpravy jako důsledek definice mocniny. **V ideálním případě bychom měli psát mocninu, ale v duchu vidět součin, který mocnina představuje.**

Terminologie:

- a^n **- mocnina**
- a **– základ mocniny (mocněnec)**
- n **– exponent (mocnitel)**

Pozor:

$(-2)^4 = 16$ **Umocňujeme číslo –2.**

$-2^4 = -16$ **Umocňujeme číslo 2, pak násobíme –1 (umocňování má přednost před násobením).**

Př. 1: Doplň větu: Pro každé $a \in R$ a každé $n \in N$ platí:

$a^1 =$, $1^n =$, $0^n =$.

Důsledky definice mocniny.
Pro každé $a \in R$ a každé $n \in N$ platí:

- $a^1 = a$,
- $1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-\text{krát}} = 1$,
- $0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{n-\text{krát}} = 0$.

Pedagogická poznámka: Už v předchozím příkladu dělají někteří studenti chybu, nejčastěji $1^n = n \cdot 1$. Tento omyl vychází z předpokladu, že číslo v exponentu slouží k násobení základu mocniny.

Př. 2: Platí například $(-2)^2 = 4$, $(-2)^3 = -8$. Na dalších příkladech zjisti, jak závisí znaménko mocniny na hodnotách čísel *a* a *n*. Postřehy co nejexaktněji ověř a zjištěné skutečnosti zapiš do přehledné tabulky.

Zkoušíme:

$2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$

$3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$

$(-2)^1 = -2$; $(-2)^2 = 4$; $(-2)^3 = -8$; $(-2)^4 = 16$

$(-3)^1 = -3$; $(-3)^2 = 9$; $(-3)^3 = -27$; $(-3)^4 = 81$

Postřehy:

- umocňováním kladného čísla získáme vždy kladné číslo,
- umocňováním záporného čísla na lichý exponent získáme vždy záporné číslo,
- umocňováním záporného čísla na sudý exponent získáme vždy kladné číslo.

Ověření:

- Umocňováním kladného čísla získáme vždy kladné číslo.
  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{krát}}$ - součin kladných čísel $\Rightarrow$ výsledek je kladný.
- Umocňováním záporného čísla na lichý exponent získáme vždy záporné číslo.
  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{krát (lichý počet)}} = \underbrace{a \cdot a} \cdot \underbrace{a \cdot a} \cdot \underbrace{\ldots} \cdot a$ - čísla v součinu jsme rozdělili do dvojic, jednotlivé dvojice dají kladná čísla, jedno a zbude (je jich lichý počet) $\Rightarrow$ výsledek je záporný.
- Umocňováním záporného čísla na sudý exponent, získáme vždy kladné číslo.
  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{krát (sudý počet)}} = \underbrace{a \cdot a} \cdot \underbrace{a \cdot a} \cdot \ldots \underbrace{\cdot a}$ - čísla v součinu jsme rozdělili do dvojic, jednotlivé dvojice dají kladná čísla, žádné a nezbude (je jich sudý počet) $\Rightarrow$ výsledek je kladný.

Znaménka mocnin:

- $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ (libovolný exponent) $\Rightarrow$ $a^n > 0$
- $a < 0$, $n = 2k$ (sudý exponent) $\Rightarrow$ $a^n > 0$ $\quad (-2)^4 = 16$
- $a < 0$, $n = 2k + 1$ (lichý exponent) $\Rightarrow$ $a^n < 0$ $\quad (-2)^3 = -8$

Pedagogická poznámka: Myslím, že je velice vhodné nechat studenty, aby se chvilku trápili sami. I strategie, se kterou zkouší mocniny (a vybírají si čísla na umocňování), je důležitá a je možné ji korigovat během jejich samostatné práce. Při zkontrolování je pak dobré zmínit, že na zkoušení vybíráme čísla „rozdílná“ a že zkouška na příkladech není důkaz.

Př. 3: Spočti mocniny.

a) 6^1 b) $(-2)^4$ c) -2^2 d) $(-2)^5$ e) $-\left(-3^2\right)$

f) $\left(\frac{1}{10}\right)^3$ g) 0^{1415} h) 1^{2011} i) -1^{1918} j) $(-1)^{1620}$

a) $6^1 = 6$ b) $(-2)^4 = 16$ c) $-2^2 = -4$ d) $(-2)^5 = -32$

e) $-\left(-3^2\right) = -(-9) = 9$ f) $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$

g) $0^{1415} = 0$ h) $1^{2011} = 1$ i) $-1^{1918} = -1$ j) $(-1)^{1620} = 1$

Pedagogická poznámka: Pokud někdo udělá chybu, vždy se snažím, aby si uvědomil, že správné řešení přímo vyplývá z dodržení pravidla $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{krát}}$. Cílem je, aby si studenti uvědomili, že existuje poměrně malé množství základních pravidel, která je nutné za všech okolností dodržovat (a to vede ke správnému výsledku) a jejich nedodržování ústí v chyby (a jejich chyby měly stejný prapočátek).
Poslední čtyři body předchozího příkladu jsou zároveň opakováním dějepisu.
Letopočet 2013 (původně 2007) připomíná rok, ve kterém jsem se stal matikářem 4.2017 (4B2011) a je určen k nahrazení.

Př. 4: Odstraň závorky. a) $\left(-a\right)^3$ b) $\left(-b\right)^6$ c) $\left(-c\right)^9$ d) $\left(-d\right)^{2n}$

a) $\left(-a\right)^3 = -a^3$ (lichý exponent $\Rightarrow$ mínus zůstává)

b) $\left(-b\right)^6 = b^6$ (sudý exponent $\Rightarrow$ mínus mizí)

c) $\left(-c\right)^9 = -c^9$ (lichý exponent $\Rightarrow$ mínus zůstává)

d) $\left(-d\right)^{2n} = d^{2n}$ ($2n$ je určitě sudé číslo $\Rightarrow$ sudý exponent $\Rightarrow$ mínus mizí)

Př. 5: Vysvětli, proč platí $\left(-b\right)^2 = b^2$. Platí podobná rovnost i pro jiné exponenty?

$\left(-b\right)^2$ $\Rightarrow$ umocňujeme na sudou mocninu $\Rightarrow$ mínus mizí $\Rightarrow$ $\left(-b\right)^2 = b^2$.

Podobná rovnost bude platit i pro všechny sudé exponenty: $\left(-b\right)^4 = b^4$, $\left(-b\right)^6 = b^6$, ...

Př. 6: Spočti na kalkulačce $\left(3-\sqrt{2}\right)^2$ a $\left(\sqrt{2}-3\right)^2$. Vysvětli. Co bude platit pro mocniny $\left(a-b\right)^{2n}$ a $\left(b-a\right)^{2n}$?

- $\left(3-\sqrt{2}\right)^2 = 2{,}51471862576...$
- $\left(\sqrt{2}-3\right)^2 = 2{,}51471862576...$

Jde o stejný případ jako v předchozím příkladu. Čísla $3-\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}-3$ se liší pouze ve znaménku, které při umocňování na druhou zmizí (stejně jako $\left(-b\right)^2 = b^2$).

$\left(\sqrt{2}-3\right)^2 = \left[-\left(3-\sqrt{2}\right)\right]^2 = \left(3-\sqrt{2}\right)^2$

Mocniny $\left(a-b\right)^{2n} = \left(b-a\right)^{2n}$ (jde o obecný zápis předchozího příkladu, kde $a = 3$ a $b = \sqrt{2}$ (nebo obráceně).

$\left(b-a\right)^{2n} = \left[-\left(a-b\right)\right]^{2n} = \left(a-b\right)^{2n}$

Př. 7: Vypočti. a) $2^2 - \left(-2\right)^3 + 2\cdot 2^2 - \left(-4\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-4^2\right)\cdot\left(-3\right)^2$

a) $2^2 - \left(-2\right)^3 + 2\cdot 2^2 - \left(-4\right)^2 = 4 - \left(-8\right) + 2\cdot 4 - 16 = 4$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-4^2\right)\cdot\left(-3\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-16\right)\left(9\right) = -\frac{16}{8}\cdot 9 = -18$

Pedagogická poznámka: Pozor, při výpočtu bodu b) postupují někteří studenti zbytečně složitě: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-4^2\right)\cdot\left(-3\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-16\right)\left(9\right) = -\frac{144}{8} = -18$. Tento postup není zas takovým zdržením, pokud mají k dispozici kalkulačku. Pokud ne (a já jim pro tyto výpočty kalkulačky zakazuji, protože bez nich je počítání rychlejší a studenti získávají odhad čísel), jde o značné zdržení. Zdržení je navíc zbytečné, protože logické je nejdřív krátit a pak teprve násobit. Více o logice úprav v hodině *010604 KISS*.

Př. 8: Vypočti. a) $0^2 \cdot (-2)^5 - (-3)^2 \cdot (-1)^{99} + (-3)^3$

b) $2(-a)^2 - a(a-2) + a^1 + 2^2 \cdot a^2$ c) $\dfrac{b^2 \cdot (-b)^3 \cdot 4^2 \cdot b^1}{b^4 \cdot 2^3}$

a) $0^2 \cdot (-2)^5 - (-3)^2 \cdot (-1)^{99} + (-3)^3 = 0 - 9 \cdot (-1) - 27 = 9 - 27 = -18$

b) $2(-a)^2 - a(a-2) + a^1 + 2^2 \cdot a^2 = 2a^2 - a^2 + 2a + a + 4a^2 = 5a^2 + 3a$

c) $\dfrac{b^2 \cdot (-b)^3 \cdot 4^2 \cdot b^1}{b^4 \cdot 2^3} = \dfrac{b^2 \cdot (-b^3) \cdot 4^2 \cdot b}{b^4 \cdot 2^3} = -\dfrac{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot 16 \cdot b}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot 8} = -2b^2$

Shrnutí: $a^3 = a \cdot a \cdot a$ a z toho je všechno jasné.